

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN TRONG THỰC TẾ

ThS. Ngô Hà Châu Loan, ThS. Bùi Đình Thắng – Khoa Cơ Sở

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Xác suất là môn học được giảng dạy cho sinh viên tất cả các ngành khoa học tự nhiên, kinh tế, kỹ thuật,... ở các trường đại học vì tầm ứng dụng rộng rãi của nó. Rất nhiều kết quả đẹp của xác suất cổ điển được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của cuộc sống. Công thức xác suất toàn phần là một ví dụ cho điều này.

Công thức xác suất toàn phần cho ta cách giải quyết một vấn đề phức tạp bằng cách chia thành nhiều trường hợp đơn giản. Nội dung của nó như sau:

Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các biến cố tạo thành hệ đầy đủ của không gian mẫu và $P(A_i) > 0$ ($i = \overline{1, n}$). A là biến cố bất kỳ của phép thử đó. Khi đó ta có:

$$P(A) = P(A_1).P(A/A_1) + \dots + P(A_n).P(A/A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(A/A_i).$$

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu bài toán công chúa và hoàng tử ếch để minh họa cho công thức xác suất toàn phần.

2. CÂU CHUYỆN CÔNG CHÚA VÀ HOÀNG TỬ ẾCH

Một nàng công chúa đi lạc vào khu rừng ma thuật. Đến 1 cái hồ thì 1 mụ phù thủy hiện ra và nói “Đứng lại nào, con bé kia! Ta đã biến 1 hoàng tử đẹp trai thành con ếch và giam cầm nó trong cái hồ này cùng với 99 con ếch khác. Mỗi con ếch đều mang 1 số trên lưng và con số của hoàng tử là lớn nhất. Đây là cách duy nhất để người nhận ra nó từ trong lũ ếch. Nếu người muốn rời khỏi khu rừng đã bị ếm bùa này, người phải tìm ra hoàng tử và hôn nó. Mỗi con ếch sẽ lần lượt nhảy lên khỏi hồ. Khi mỗi con ếch xuất hiện, người phải quyết định hôn nó hay đá nó trở lại, và mỗi con ếch chỉ nhảy lên đúng 1 lần mà thôi. Nếu người hôn phải ếch thật hoặc không chịu hôn con nào thì người sẽ không thể rời khu rừng và hoàng tử thì vĩnh viễn ở lại trong hồ”.

Rất may, công chúa của chúng ta rất giỏi toán và nàng đã tìm được chiến lược tốt nhất để quyết định nên hôn chú ếch nào.

Chú ếch đầu tiên nhảy ra với số 2 trên lưng và bị công chúa đá trở lại vào hồ. Chú ếch thứ 2 mang số 12 nhưng cũng chung số phận với chú thứ nhất. Chú thứ 3 mang số -6 trên lưng (*không có quy định các chú ếch chỉ mang toàn số dương*) và dĩ nhiên là quay trở lại hồ ngay. Công chúa lặp đi lặp lại điều này với M chú ếch đầu thì nhận thấy số lớn nhất xuất hiện là 23,2 (*cũng không quy định các chú ếch chỉ mang toàn số nguyên*). Nàng đợi đến khi có chú ếch mang số lớn hơn 23.2 và hôn nó (*dĩ nhiên chú ếch mang số 23.2 có thể chính là hoàng tử và cô đã bỏ lỡ cơ hội duy nhất đó*). Chú ếch biến mất sau 1 tiếng nổ “bụp” và 1 hoàng tử đẹp trai xuất hiện. Thế là họ sống hạnh phúc mãi mãi. (*Nếu bạn thích kết cục bất hạnh thì: Mụ phù thủy hiện lên cười đắc thắng khi chú ếch vẫn y nguyên trước sự chú ý hết mực của công chúa. Ôi trời, vẫn còn chú ếch mang số lớn nhất chưa xuất hiện...*).

Vậy công chúa đã tính toán như thế nào để đạt được khả năng hôn trúng hoàng tử là cao nhất?

3. SỬ DỤNG CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN ĐỂ GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN

Nếu công chúa chọn chú ếch đầu tiên để hôn, kết quả sẽ như thế nào? Lúc này, nàng chưa có bất kì thông tin gì về các con ếch nên xác suất thành công là 1%. Muốn xác suất chọn được cao hơn 1%, rõ ràng công chúa phải đá chú ếch đầu tiên quay trở lại hồ. Bằng cách lý luận như vậy, công chúa tìm ra chiến lược là sẽ đá một số (M) chú ếch đầu tiên trở lại hồ (để thu thập thông tin) và ghi nhớ con số cao nhất. Kể từ con ếch thứ M+1, nếu mang số cao hơn thì hôn nó, còn nếu thấp hơn thì chờ chú thứ M+2,...

Vấn đề đặt ra là: công chúa phải quyết định đá bao nhiêu con trước? Công thức xác suất toàn phần sẽ làm sáng tỏ vấn đề này.

Ta xét bài toán tổng quát: giả sử trong hồ có N con ếch và công chúa chọn đá M chú ếch đầu tiên trở lại hồ. Sau đó, chờ chú tiếp theo có số cao hơn số lớn nhất trong M con ếch đã đá. Công chúa cần tìm M=? để xác suất tìm được hoàng tử là cao nhất?

x_1	x_2	$\dots$	x_{M-1}	x_M	x_{M+1}	x_{M+2}	$\dots$	x_{N-1}	x_N
-------	-------	---------	-----------	-------	-----------	-----------	---------	-----------	-------

Gọi B là biến cố công chúa tìm được hoàng tử.

Gọi A_M là biến cố hoàng tử là một trong M chú ếch đầu tiên.

Gọi A_{M+1} là biến cố hoàng tử là chú ếch nhảy lên thứ M+1

Gọi A_{M+2} là biến cố hoàng tử là chú ếch nhảy lên thứ M+2

...

Gọi A_N là biến cố hoàng tử là chú ếch nhảy lên thứ N.

Khi đó, $\{A_M, A_{M+1}, \dots, A_N\}$ lập thành hệ đầy đủ của không gian mẫu. Ta có các xác suất:

$$P(A_M) = \frac{M}{N}, P(A_{M+1}) = P(A_{M+2}) = \dots = P(A_N) = \frac{1}{N}.$$

Bây giờ ta sẽ tính xác suất để biến cố B (*công chúa tìm được hoàng tử*) xảy ra với điều kiện một trong các biến cố A_i xảy ra, ($i = \overline{M, N}$).

+ Nếu biến cố A_M xảy ra thì $P(B / A_M) = 0$.

x_1	x_2	...hoàng tử...	x_M	x_{M+1}	x_{M+2}	...	x_{N-1}	x_N
-------	-------	----------------	-------	-----------	-----------	-----	-----------	-------

+ Nếu biến cố A_{M+1} xảy ra thì $P(B / A_{M+1}) = 1$.

x_1	...	x_M	x_{M+1} : hoàng tử	x_{M+2}	...	x_{N-1}	x_N
-------	-----	-------	----------------------	-----------	-----	-----------	-------

+ Nếu biến cố A_{M+2} xảy ra, tức là hoàng tử là chú ếch nhảy lên thứ M+2 thì công chúa thành công (*trừ trường hợp chú ếch thứ M+1 có số cao hơn M chú ếch đầu tiên*). Do vậy, xác suất tìm được hoàng tử trong trường hợp này là

$$P(B / A_{M+2}) = \frac{M}{M+1}.$$

x_1	...	x_M	x_{M+1}	x_{M+2} : hoàng tử	...	x_{N-1}	x_N
-------	-----	-------	-----------	----------------------	-----	-----------	-------

+ Nếu biến cố A_{M+3} xảy ra, tức là hoàng tử là chú ếch nhảy lên thứ M+3 thì công chúa thành công (*trừ trường hợp trong M+2 chú ếch trước đó, chú có số cao nhất nhảy lên ở lần thứ M+1 hoặc M+2*). Do vậy, xác suất tìm được hoàng tử trong trường hợp này là:

$$P(B / A_{M+3}) = \frac{M}{M+2}.$$

x_1	$\dots$	x_M	x_{M+1}	x_{M+2}	x_{M+3} :hoàng tử	$\dots$	x_N
-------	---------	-------	-----------	-----------	---------------------	---------	-------

Cứ tiếp tục lý luận như vậy cho đến chú ếch cuối cùng, thứ N nhảy lên.

+ Nếu biến cố A_N xảy ra, tức là hoàng tử là chú ếch nhảy lên thứ N thì công chúa thành công (*trừ trường hợp trong N-1 chú ếch trước đó, chú có số cao nhất nhảy lên ở lần thứ M+1 hoặc M+2,... hoặc lần thứ N-1*). Do vậy, xác suất tìm được hoàng tử trong trường hợp này là $P(B / A_N) = \frac{M}{N-1}$.

Sử dụng công thức xác suất toàn phần với hệ đầy đủ là $\{A_M, A_{M+1}, \dots, A_N\}$, ta có:

$$\begin{aligned} P(M, N) &:= P(B) = P(A_M).P(B / A_M) + P(A_{M+1}).P(B / A_{M+1}) + \dots + P(A_N).P(B / A_N) \\ &= \frac{M}{N}.0 + \frac{1}{N} \left(1 + \frac{M}{M+1} + \frac{M}{M+2} + \dots + \frac{M}{N-1} \right) \\ &= \frac{M}{N} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M+1} + \frac{1}{M+2} + \dots + \frac{1}{N-1} \right) \end{aligned}$$

Ta muốn chọn số M sao cho xác suất này là lớn nhất, tức là tìm số lớn nhất trong dãy số

$$P(1, N), P(2, N), \dots, P(M, N), P(M+1, N), \dots, P(N-1, N), P(N, N).$$

Bằng cách giải hai bất phương trình $P(M-1, N) < P(M, N)$ và

$P(M, N) > P(M+1, N)$, ta được:

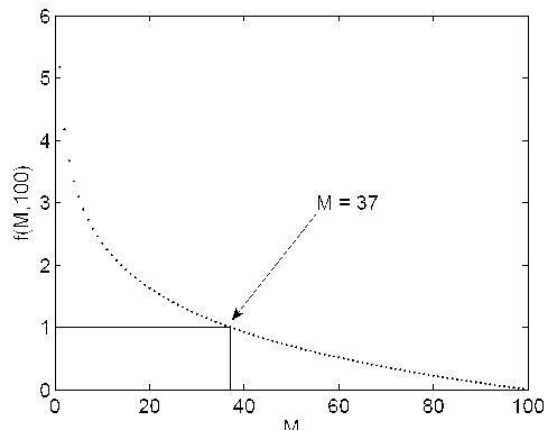
$$\frac{1}{M+1} + \frac{1}{M+2} + \dots + \frac{1}{N-1} < 1 < \frac{1}{M} + \frac{1}{M+1} + \frac{1}{M+2} + \dots + \frac{1}{N-1}.$$

Dựa vào bất đẳng thức trên, ta có thể tìm được số M mong muốn. Ví dụ:

+ Với N=3, ta có: $\frac{1}{2} < 1 < 1 + \frac{1}{2}$, do đó ta chọn M=1, nghĩa là chỉ đá chú ếch đầu tiên quay trở lại hồ.

+ Với N=10, ta có: $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} < 1 < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$, do đó ta chọn M=3, nghĩa là ta đá 3 chú ếch đầu tiên quay trở lại hồ. Từ chú ếch thứ 4, nếu cao hơn 3 số trước thì chọn, nếu thấp hơn thì ta chờ tiếp.

+ Với N=100 ta có thể nhờ máy tính vẽ đồ thị của hàm $f(M, 100)$ và tìm ra M=37.



Trong trường hợp tổng quát, bằng công cụ giải tích, người ta đã tìm được qui tắc $\frac{1}{e}$, (hay qui tắc 37%), ước lượng được chiến lược tốt nhất là $M \approx \frac{1}{e}N$. Như vậy, nếu có 100 chú ếch, công chúa nên đá 37 chú đầu tiên trở lại hồ. Từ chú ếch thứ 38, nếu có số cao hơn 37 chú còn lại thì hôn, nếu không thì tiếp tục

chờ đợi. Theo chiến lược này, công chúa sẽ tăng xác suất tìm được hoàng tử từ 1% lên xấp xỉ 37%.

4. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA QUI TẮC 37%

Bài toán hoàng tử ếch chỉ là một minh họa cho công thức xác suất toàn phần và qui tắc 37%. Việc tìm ra qui tắc này có ý nghĩa rất lớn trong lý thuyết tối ưu. Do khuôn khổ bài báo, chúng tôi chỉ giới thiệu một vài ứng dụng đơn giản của qui tắc này trong cuộc sống:

+ Các cô gái trẻ thường có xu hướng chấm điểm cho những người hẹn hò với mình, và mong muốn tìm được người có số điểm cao nhất. Giả sử trung bình, mỗi cô gái hẹn hò với khoảng 5 người. Khi đó, chiến lược tối ưu là tạm đá đi $M \approx 37\% \cdot 5 \approx 2$, nghĩa là đá đi 2 “chú ếch”, và chờ đợi “chú ếch” tiếp theo có điểm cao hơn. Đây cũng là cách giải thích hợp lý cho câu hỏi “*vì sao tình yêu đầu thường tan vỡ*”.

+ Qui tắc này cũng xuất hiện trong bài toán “*tuyển thư kí*” nổi tiếng: người quản lý cần tuyển thư ký tốt nhất trong n ứng viên có thể xếp hạng. Các ứng viên được phỏng vấn lần lượt theo một thứ tự ngẫu nhiên. Quyết định cho mỗi ứng viên phải được đưa ra ngay sau khi phỏng vấn ứng viên đó. Sau khi đã bị từ chối, ứng viên đó sẽ không thể được tuyển. Trong quá trình phỏng vấn, người quản lý có thể xếp hạng các ứng viên đã phỏng vấn nhưng không biết gì về chất lượng của các ứng viên chưa phỏng vấn. Câu hỏi đặt ra là nên sử dụng chiến thuật nào để tối ưu hóa xác suất tuyển được ứng viên tốt nhất?

+ Người lao động luôn muốn chọn công ty phù hợp nhất với mình, bao gồm tiền lương, môi trường làm việc,... Giả sử trung bình một người có thể thay đổi công việc 8 lần, người đó nên chia tay $M \approx 37\% \cdot 8 \approx 3$ công việc đầu tiên.

Hi vọng rằng, một số ví dụ minh họa trên sẽ giúp cho bài giảng về xác suất có điều kiện và công thức xác suất toàn phần sinh động hơn, thu hút được sự quan tâm và hứng thú của sinh viên với môn học này.

5. TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. John Billingham, *Kissing the frog: A mathematician's guide to mating*, <https://plus.maths.org/content/os/issue48/features/billingham/index>.
2. Secretary problem, https://en.wikipedia.org/wiki/Secretary_problem.

3. Công thức toán học giúp bạn tìm được “người vợ hoàn hảo”,
<http://kenh14.vn/kham-pha/cong-thuc-toan-hoc-giup-ban-tim-duoc-nguoi-vo-hoan-hao-20140524055954725.chn>
4. Nguyễn Văn Quảng (2007), *Giáo trình xác suất*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.
5. Lê Văn Thành và Ngô Trí Hải (10/2014), Một ứng dụng của công thức xác suất toàn phần, Kỷ yếu Hội thảo *Đổi mới nội dung và phương pháp giảng dạy Toán học*, Trường Đại học Vinh, tháng 10 năm 2014.